



Homothétie-translations

Soit I un point du plan et k un réel non nul.

Définition :

On appelle homothétie h de centre I et de rapport k , l'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que $\vec{IM'} = k \vec{IM}$.

On note : $h = h_{(I,k)}$.

Cas particuliers

$$h_{(I,1)} = \text{Id}_P \quad \text{et} \quad h_{(I,-1)} = S_I$$

Propriétés

On suppose que $k \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ et $M \neq I$.

1. I , M et $M' = h_{(I,k)}(M)$ sont alignés.
2. I est le barycentre de (M, k) et $(M', -1)$.
3. $\vec{MI} = \frac{1}{1-k} \vec{MM'}$.
4. Une application f est une homothétie de rapport équivalent à k pour tous points M et N d'images respectives M' et N' par f , $\vec{M'N'} = k \vec{MN}$.

Conséquences: soit h une homothétie de rapport k

1. L'image d'une droite par h est une droite qui est parallèle.
2. h conserve les mesures des angles orientés.
3. Soit A et B deux points distincts, C et D deux points distincts et k réel strictement et différent de 1.
Si $(AB) \parallel (CD)$ et $CD = k \cdot AB$ alors il existe deux homothéties de rapports respectifs k et $(-k)$ qui transforment $[AB]$ en $[CD]$.

Exercice

Soit A et B deux points distincts, on suppose que $B = h_{\left(I, \frac{3}{2}\right)}(A)$.

1. Construire I .
2. Soit C un point n'appartenant pas à la droite (AB) .
Construire $D = h_{\left(I, \frac{3}{2}\right)}(C)$.



Homothétie-translations

Solution :

1. $B = h_{\left(I, \frac{3}{2}\right)}(A) \Leftrightarrow \vec{AI} = \frac{1}{1 - \frac{3}{2}} \vec{AB} \Leftrightarrow \vec{AI} = -2 \vec{AB}$. (voir figure ci dessous)
2. On a : $D = h_{\left(I, \frac{3}{2}\right)}(C)$ donc $D \in (IC)$. D'autre part, $h_{\left(I, \frac{3}{2}\right)}((AC)) = (BD)$ est la parallèle à la droite (CA) passant par $B = h_{\left(I, \frac{3}{2}\right)}(A)$.

Composition : soit k et k' deux non nuls et I et I' deux points du plans.

1. $h_{(I,k)} \circ h_{(I,k')} = h_{(I, kk')}$
2. $h_{(I,k)}$ est une bijection du plan et sa réciproque est $h^{-1} = h_{\left(I, \frac{1}{k}\right)}$.
3. Si $kk' = 1$ alors $h_{(I,k)} \circ h_{(J,k')} = t_{\vec{IJ}}$.
Si $kk' \neq 1$ alors $h_{(I,k)} \circ h_{(J,k')}$ est une homothétie de rapport kk' et de centre L tel que I, J et L sont alignés.
4. $t_{\vec{IJ}} \circ h_{(I,k)} = h_{(J,k)}$.

Exercice :

A, B et C étant trois points non alignés. On désigne par h_A l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{4}$, par h_B l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{4}$, et par t la translation de vecteur $\vec{CB} + \frac{1}{4} \vec{BA}$.

On note $f = t \circ h_B \circ h_A$.

1. Déterminer $f(A)$.
2. Montrer que f est une homothétie dont on précisera le rapport et le centre.

solution :

1. Soit $A_1 = h_B \circ h_A(A) = h_B(A)$ d'où $\vec{BA_1} = \frac{1}{4} \vec{BA}$.

$$\text{Donc } f(A) = t(A_1) = A_2 \quad \text{avec} \quad \vec{A_1 A_2} = \vec{CB} + \frac{1}{4} \vec{BA} = \vec{CB} + \vec{BA_1} = \vec{A_1 C}.$$

Ainsi : $A_2 = C$ donc $f(A) = C$.



Homothétie-translations

2. f est la composée d'une translation et de deux homothéties de même rapport $\frac{1}{4}$ donc f

est une homothétie de rapport $\frac{1}{16}$.

Soit O le centre de f , O est défini par :

$$\vec{OC} = \frac{1}{16}\vec{OA} \Leftrightarrow \vec{OA} + \vec{AC} = \frac{1}{16}\vec{OA} \Leftrightarrow \frac{15}{16}\vec{AO} = \vec{AC} \Leftrightarrow \vec{AO} = \frac{16}{15}\vec{AC}.$$

Ecriture complexe

1. de l'homothétie h de rapport k non nul et différent de 1 est : $z' = kz + b$ où b est un nombre complexe.
2. de l'homothétie de centre I d'affixe z_0 et de rapport k réel non nul et différent de 1 est : $z' - z_0 = k(z - z_0)$.
3. Soit k un réel non nul et différent de 1.

$z' = kz + b$ est l'écriture complexe de l'homothétie de centre I d'affixe $z_0 = \frac{b}{1-k}$ et de rapport k .